Stokes の流れ関数について

軸対称な円筒座標系において，図 1 に示すような非圧縮性の流れを考える．連続の式は，

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial (ru)}{\partial r}+\frac{\partial (rw)}{\partial z}=0 \tag{1}$$

と書ける．今，Stokes の流れ関数を ψ_S [m^3/s]とし，

$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_S}{\partial z}, \quad w=-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_S}{\partial r} \tag{2}$$

のように定義すれば，式(1)は常に満たされる．

次に，経路 AB 間を通過する流量（単位は m^3/s）は，経路上の局所速度の法線成分に $2\pi r$ を掛けて線積分することにより得られる．

$$\begin{aligned}(\text{Flow rate})&=\int_A^B q_n 2\pi r\,ds=2\pi\int_A^B \vec{q}\cdot\vec{n}\,r\,ds=2\pi\int_A^B (un_r+wn_z)\,r\,ds\\&=2\pi\int_A^B\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_S}{\partial z}n_r-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_S}{\partial r}n_z\right)r\,ds=2\pi\int_A^B\left(\frac{\partial \psi_S}{\partial z}n_r-\frac{\partial \psi_S}{\partial r}n_z\right)ds\end{aligned} \tag{3}$$

ここで，この曲線（積分経路）に対しての単位法線ベクトル $\vec{n}$ と $d\vec{s}$ ベクトルとは互いに直交するので，

$$\vec{n}=\vec{e}_r\frac{dz}{ds}-\vec{e}_z\frac{dr}{ds} \quad \left(\because \quad d\vec{s}=\vec{e}_r dr+\vec{e}_z dz\right) \tag{4}$$

と書けるだろう．確認のために，大きさを求めると確かに 1 になる．

$$|\vec{n}|=\sqrt{\left(\frac{dz}{ds}\right)^2+\left(-\frac{dr}{ds}\right)^2}=\frac{\sqrt{(dz)^2+(dr)^2}}{ds}=1$$

式(4)を式(3)に代入して，流量を求めていくと

$$\begin{aligned}(\text{Flow rate})&=2\pi\int_A^B\left(\frac{\partial \psi_S}{\partial z}n_r-\frac{\partial \psi_S}{\partial r}n_z\right)ds=2\pi\int_A^B\left(\frac{\partial \psi_S}{\partial z}\frac{dz}{ds}+\frac{\partial \psi_S}{\partial r}\frac{dr}{ds}\right)ds\\&=2\pi\int_A^B\left(\frac{\partial \psi_S}{\partial z}dz+\frac{\partial \psi_S}{\partial r}dr\right)=2\pi\int_A^B d\psi_S=2\pi\left[\psi_S(B)-\psi_S(A)\right]\end{aligned} \tag{5}$$

となる．よって，AB 間の曲線の経路に依らず，2 点間を通過する流量は，2 点間の Stokes の流れ関数値の差に 2π を掛けたものに等しいことがわかる．ある一つの流線に沿う積分を考えると，その積分値はゼロとなるので，流線上で ψ_S は一定値となることがわかる．

参考１：非圧縮性流れでは，$\vec{u}=\vec{\nabla}\times\vec{\psi}$ の関係式から，$u=-\dfrac{\partial \psi_\phi}{\partial z}$， $w=\dfrac{\partial \psi_\phi}{\partial r}+\dfrac{\psi_\phi}{r}$ と流れ関数 ψ_ϕ を定義するができ，式(1)は満たされる．しかしながら，この通常の流れ関数（ベクトルポテンシャルの周方向成分）では，Stokes の流れ関数とは次元（単位）が異なるため，2 点間の流れ関数の差は，当然のことながら流量とはならないことに注意.

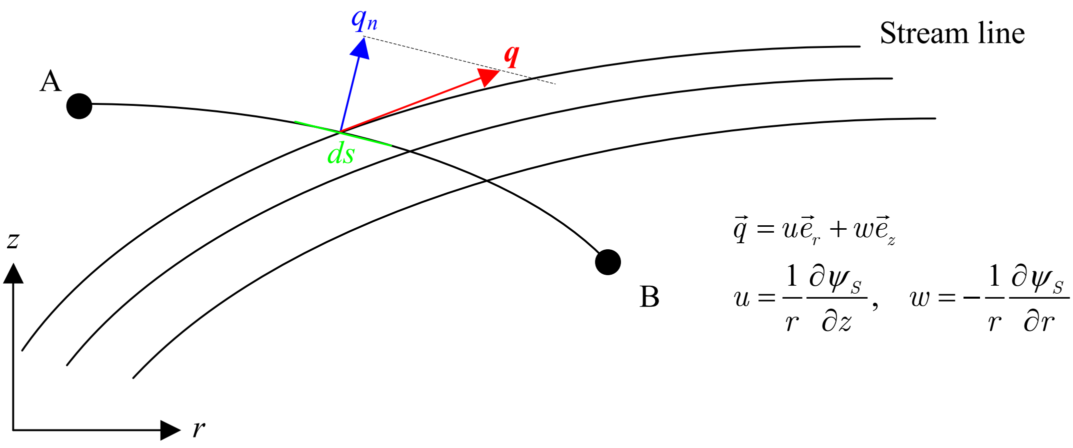


図１　ある積分経路 AB と流線の交点における速度ベクトル $\boldsymbol{q}$，法線速度 q_n，積分線素 ds．単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は q_n に平行である．

参考２：球座標系 (r,θ,ϕ) における連続の式は，軸対称の場合には左辺第３項が落ちて，

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(u_\theta \sin\theta\right) + \underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}}_{0} = 0$$

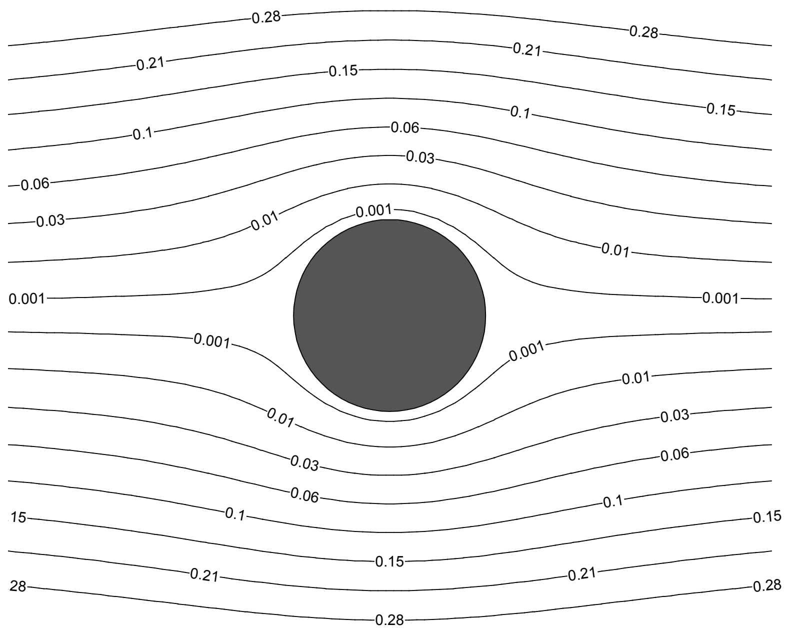
と与えられる．これを変形すると次式のように書ける．

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r \sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r u_\theta \sin\theta\right) = 0$$

したがって，上式を恒等的に満足するように，軸対称球座標系のストークスの流れ関数 ψ_{sp} を次のように定義できる．

$$u_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi_{sp}}{\partial\theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_{sp}}{\partial r}$$

一様流速中に置かれた静止球体まわりの軸対称なクリーピング流れでは，以下に示される流線（ストークスの流れ関数 ψ_{sp} の等高線）が描ける．



軸対称流の可視化例．線に付与される数字は流れ関数の値を示す．